電気回路学の復習（2）

2019.4.15

担当教官　山尾　泰

復習項目

1．　回路方程式の立て方　　KCL，　KVL

2．　回路の正弦波定常解　　微分方程式

3．　回路の交流インピーダンス　$\frac{dI}{dt} = j\omega I$　$\int I dt = \frac{I}{j\omega}$

4．　フェーザ　　　振幅と位相　実効値

5．　交流消費電力　$P_L = \mathrm{Re}\left\{VI^*\right\} = \mathrm{Re}\left\{V^* I\right\} = v_m i_m \cos\theta$

6．　テブナン／ノートンの定理

テブナンの定理と整合

（問題1）図1の駆動回路を端子$v(t)$から左に見たときのテブナンの**等価電源電圧** E_0, および **内部インピーダンス** Z_0 をフェーザ形式で求めよ.

ただし $e(t) = \sin \omega t\ [V]$, $R = 1[\Omega]$, $L = 1[H]$, $C = 0.5[F]$ とする

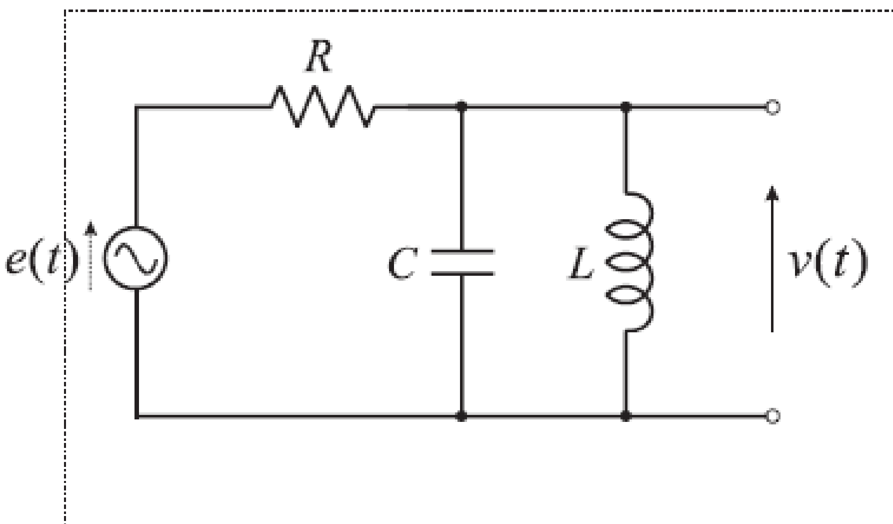


図1 駆動回路

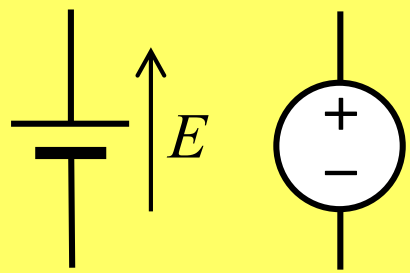
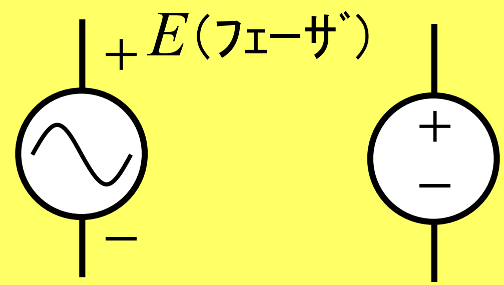
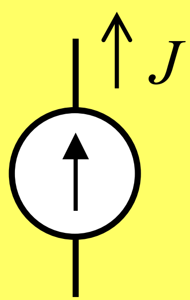
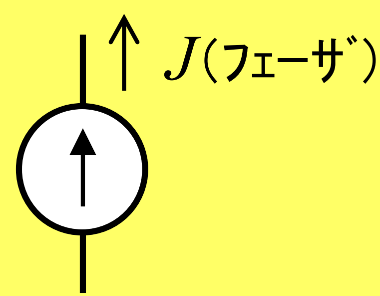
フェーザ形式

↓

交流解析

電源について

回路素子としての ＜4つの電源＞

	直流	交流
電圧源		
電流源		

いずれも“**理想化された**”電源

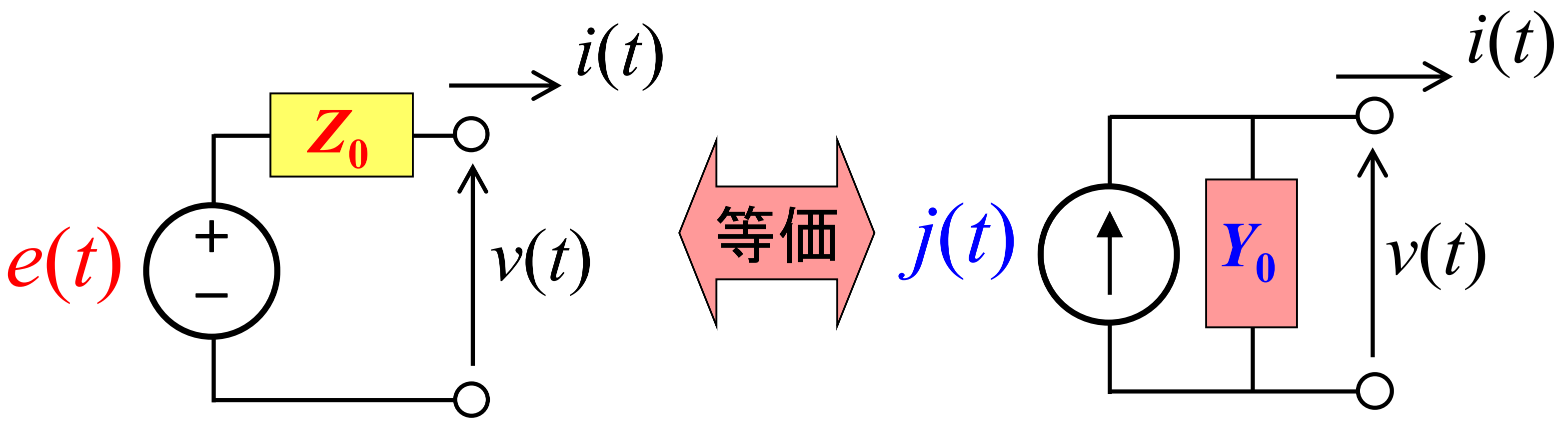
電圧源と電流源の等価変換

- 内部インピーダンス／アドミタンスを有する電圧源と電流源があり、

$$Y_0 = \frac{1}{Z_0} \quad \text{かつ} \quad j(t) = \frac{e(t)}{Z_0} = Y_0 e(t)$$

ならば

この電圧源と電流源は回路として等価である。



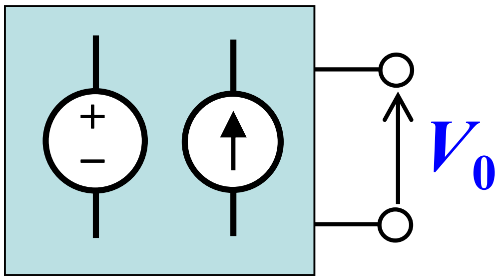
等価電圧源の定理(テブナンの定理)とは？

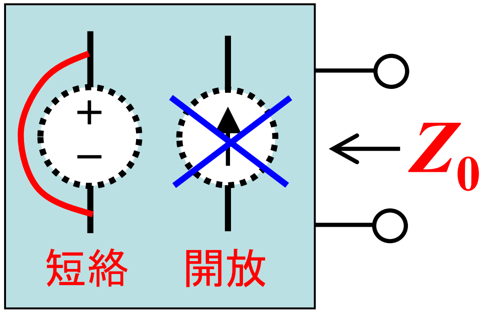
電圧源や電流源を含む回路の任意の2端子間にインピーダンス Z を接続した場合に、Z に流れる電流 I は、

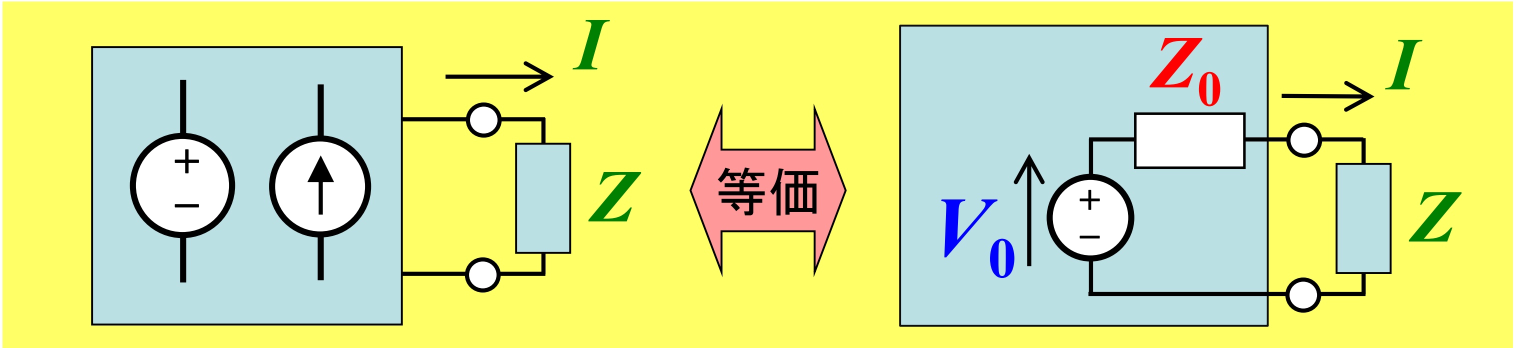
(1)2端子間の開放電圧 V_0 (等価電源電圧)

(2)回路中のすべての電圧源を短絡除去し、電流源は開放除去した場合に、2端子間から見たその回路のインピーダンス Z_0

を用いて $I = \dfrac{V_0}{Z_0 + Z}$ と表される。







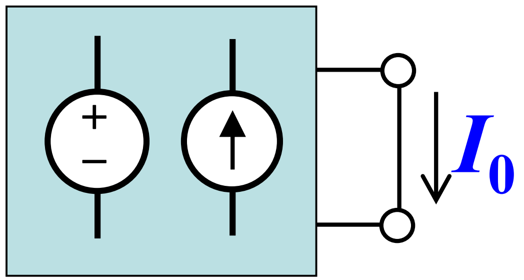
等価電流源の定理(ノートンの定理)とは?

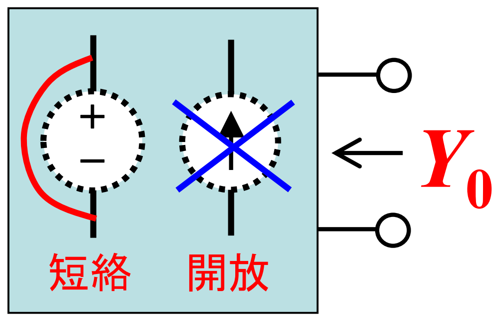
電圧源や電流源を含む回路の任意の2端子間にアドミタンス Y を接続した場合に、Y の端子電圧 V は、

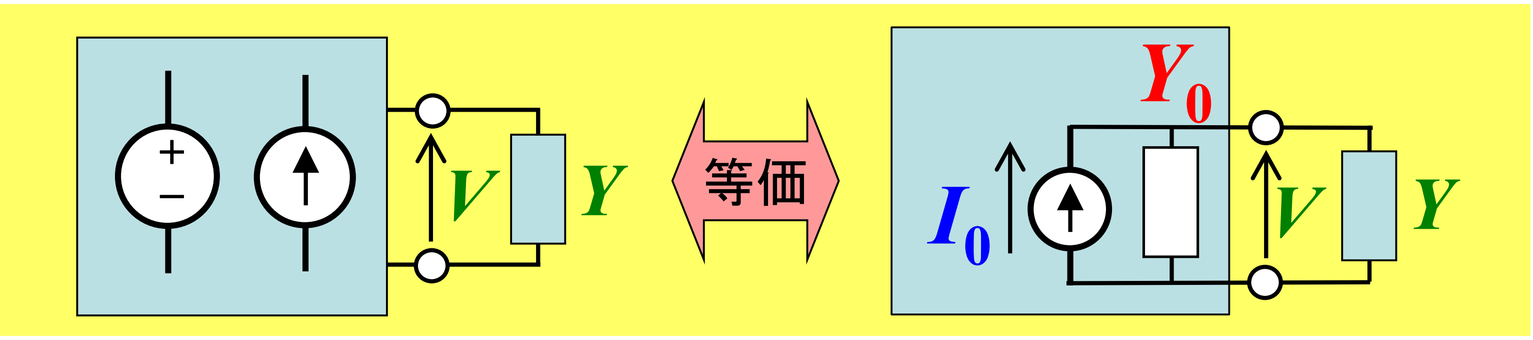
(1) 2端子間の短絡電流 I_0 (等価電源電流)

(2) 回路中のすべての電圧源を短絡除去し、電流源は開放除去した場合に2端子間から見たその回路のアドミタンス Y_0

を用いて $V = \dfrac{I_0}{Y_0 + Y}$ と表される。







等価電源電圧と 内部インピーダンスを求める

（問題1）図1の回路を端子$v(t)$から左に見たときのテブナンの等価電源電圧 E_0, および 内部インピーダンス Z_0 をフェーザ形式で求めよ.

ただし $e(t) = \sin \omega t\ [V], R = 1[\Omega],\ L = 1[H], C = 0.5[F]$ とする

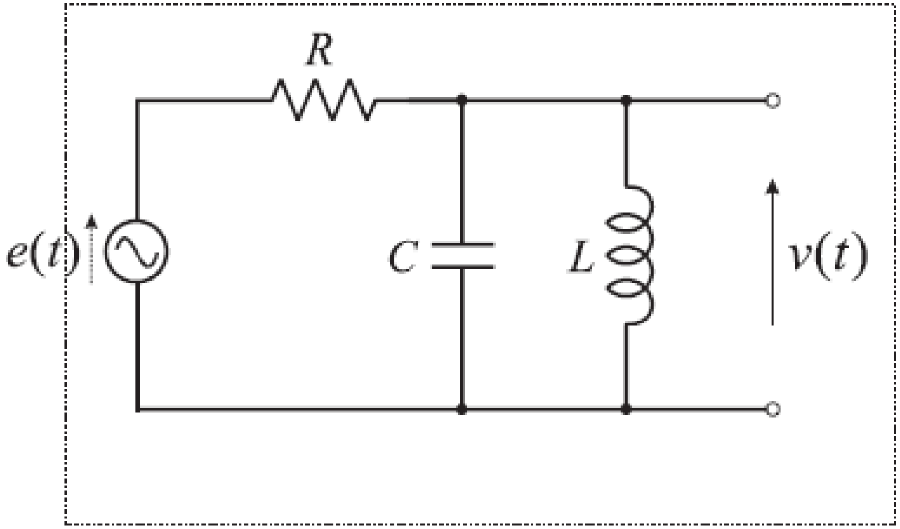
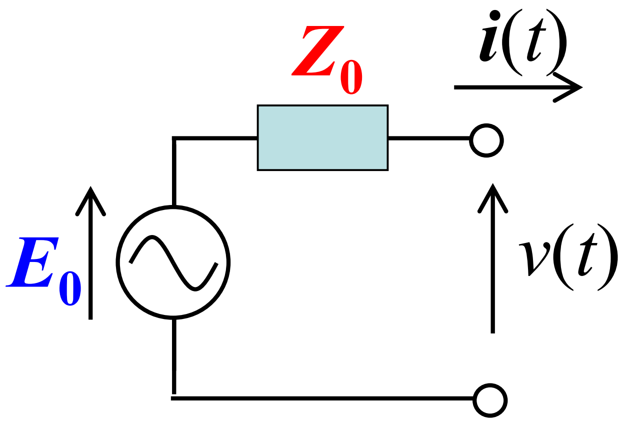


図1



$$I = \frac{E_0}{Z_0 + Z}$$

（1）等価電圧源 E_0

等価電圧源定理（テブナンの定理）から

ある2端子からみた**等価電圧源の電圧** E_0 は、その端子を開放した場合に観測される電圧 V に等しい。

そこで　前回の例題1-（4）で求めたVを用いて

$$E_0 = V = \frac{j\omega L}{R - \omega^2 CRL + j\omega L} E = \frac{1}{1 + j(\omega CR - \frac{R}{\omega L})} E$$

$R = 1[\Omega], L = 1[H], C = 0.5[F]$ を代入すると

$$E_0 = \frac{E}{1 + j(\frac{\omega}{2} - \frac{1}{\omega})}$$

$E;$ 交流電圧源 $e(t)$ のフェーザ

$\omega;$ 交流電圧源 $e(t)$ の角周波数

（続き） 交流電圧源 $e(t)$ のフェーザ E を求めよう

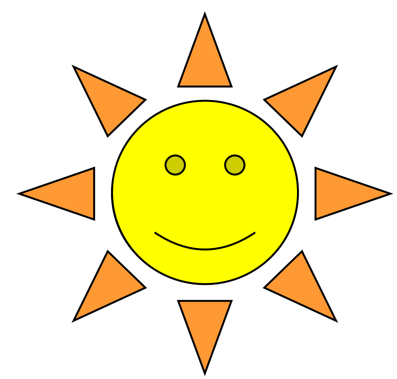
今、$\underbrace{e(t) = \mathrm{Im}[\sqrt{2}Ee^{j\omega t}]}_{\text{電圧フェーザ } E \text{ の定義式}} = \underbrace{\sin\omega t = \mathrm{Im}[e^{j\omega t}]}_{\text{オイラーの公式}}$ であるから

$$\sqrt{2}Ee^{j\omega t} = e^{j\omega t} \quad \therefore \quad E = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

（振幅1の正弦波の実効値）

これを代入すると

$$\boxed{E_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{1 + j(\frac{\omega}{2} - \frac{1}{\omega})}}$$

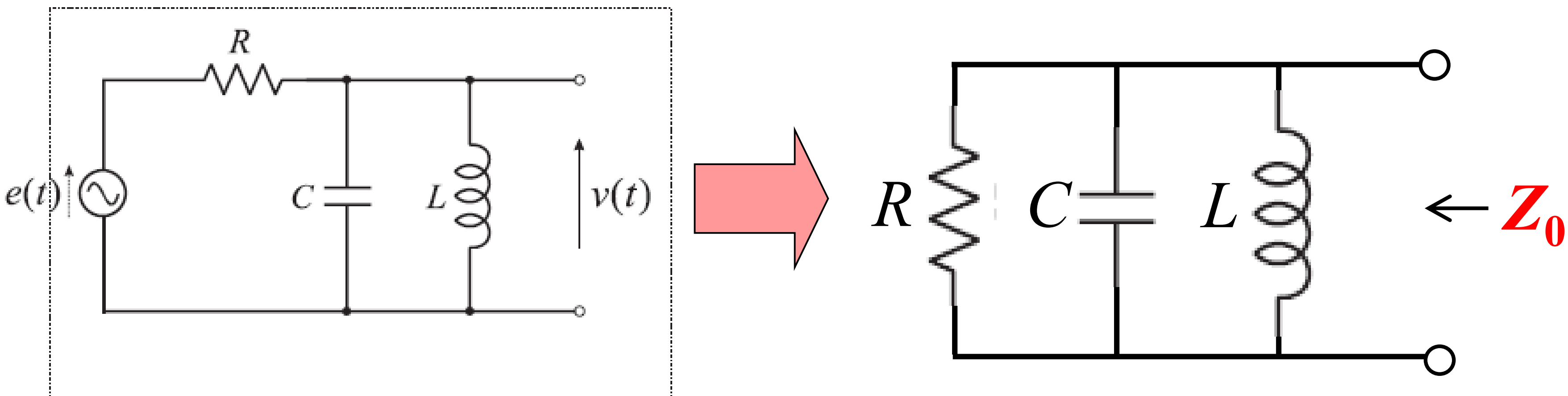


正 解

等価電圧源のフェーザが複素数であるから、
もとの電圧源 $e(t)$ に対して位相が回転する

(2)内部インピーダンス　Z_0

Z_0 は回路中のすべての電圧源を短絡除去し、電流源は開放除去した場合に2端子間から見たその回路のインピーダンスであるから、



すなわち、R, C, L の並列インピーダンスを求めればよい。

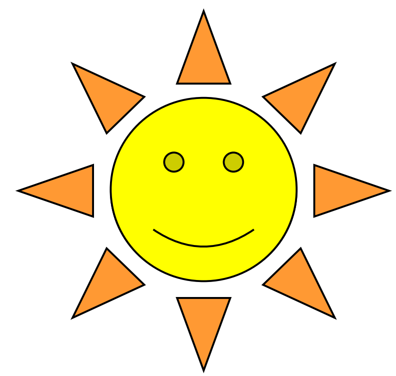
並列回路のインピーダンスは各アドミタンスの和の逆数として求めるとよい

（続き）

$$\therefore \quad Z_0 = \frac{1}{\dfrac{1}{R} + j\omega C + \dfrac{1}{j\omega L}} = \frac{R}{1 + j\left(\omega RC - \dfrac{R}{\omega L}\right)}$$

$R = 1[\Omega], L = 1[H], C = 0.5[F]$ を代入すると

$$\boxed{Z_0 = \frac{1}{1 + j\left(\dfrac{\omega}{2} - \dfrac{1}{\omega}\right)}}$$



正 解

（問題2）図1の端子に図2の回路を接続したときに、負荷インピーダンスR_Lで消費される平均電力が最大になる（整合している）ときの電源電圧$e(t)$ の角周波数 ω を求めよ.

ただし図１の回路条件に加えて、n_1:n_2=1:3, $R = 9[\Omega]$ とする。

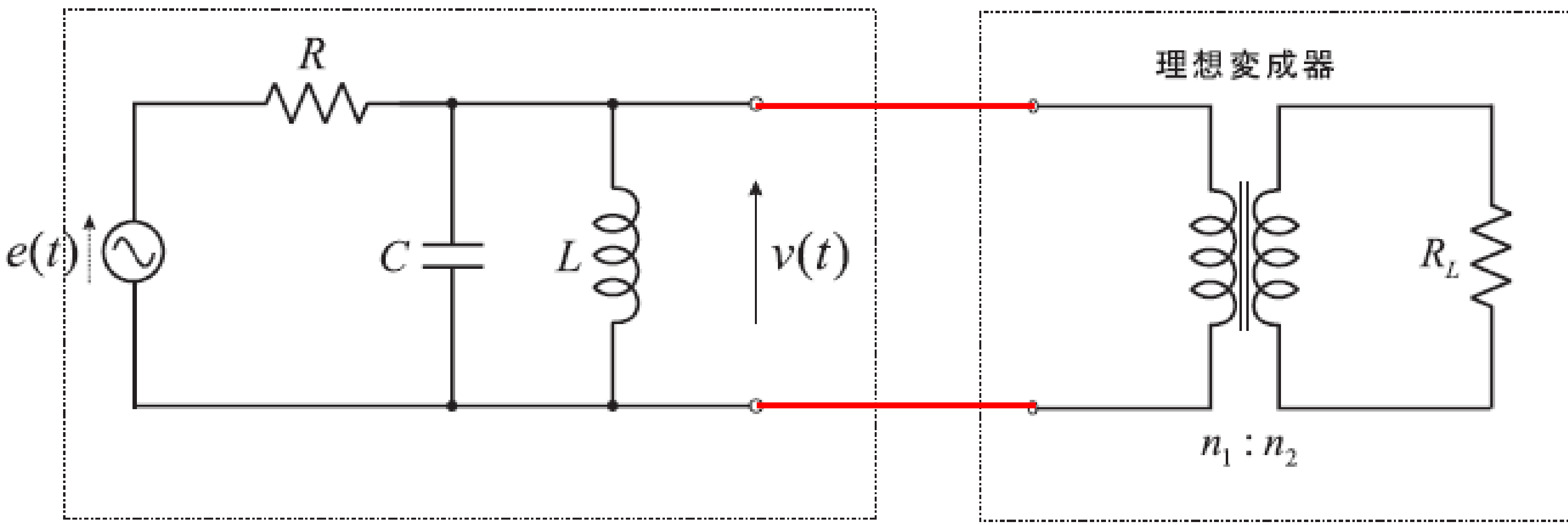


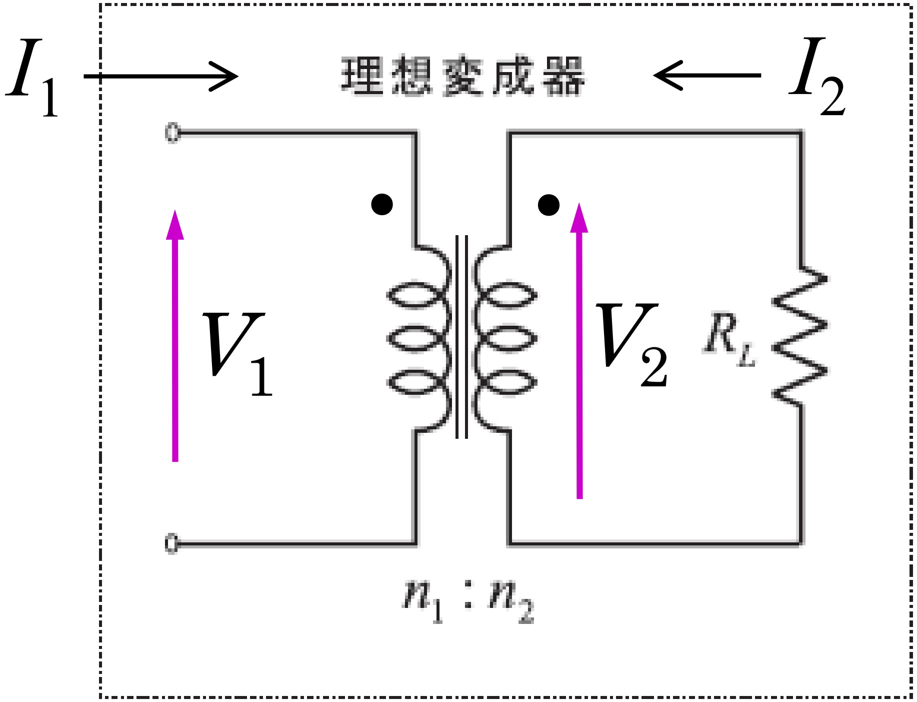
図１駆動回路　　　図2 負荷回路

図１＋２

変成器を含む回路の等価回路

理想変成器においては、

（1）1次電圧 と2次電圧 の比は一定で巻数比に等しい。

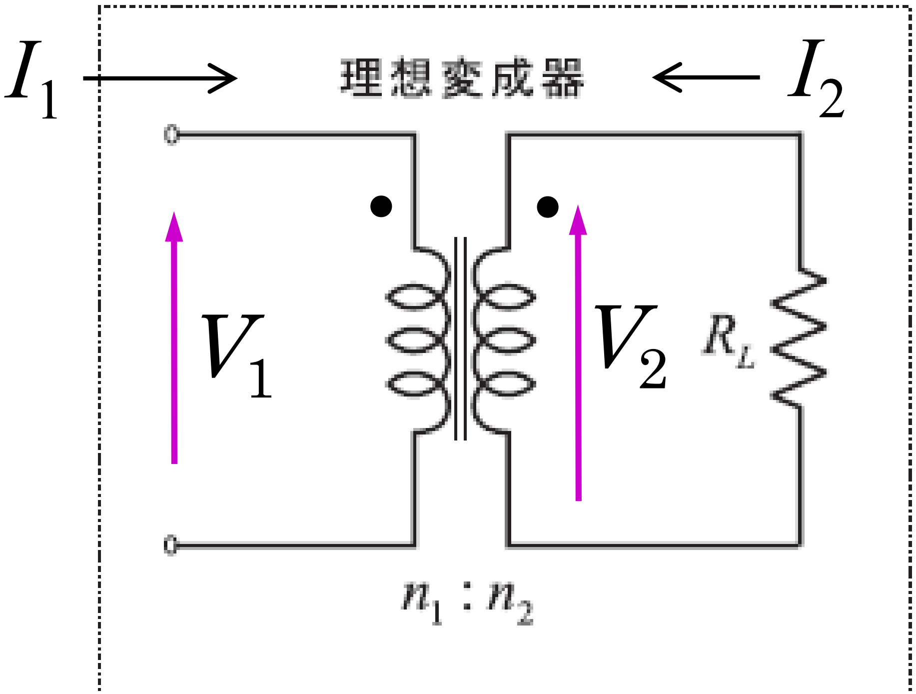


$$V_1 : V_2 = n_1 : n_2$$

$$\therefore \; V_2 = \frac{n_2}{n_1} V_1$$

さらに

（2）１次側に入力される電力と2次側に出力される電力は等しい。



$$V_1 I_1 = V_2 I_2$$

$$\therefore \ I_1 = \frac{V_2}{V_1} I_2 = \frac{{V_2}^2}{V_1 R_L}$$

V_2 に（1）の式を代入して

$$I_1 = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \frac{V_1}{R_L}$$

すなわち１次側の電流は、変成器がない場合に比べると巻数比の２乗倍となる

（続き）

1次側から図2の回路を見た等価インピーダンス Z_2 は

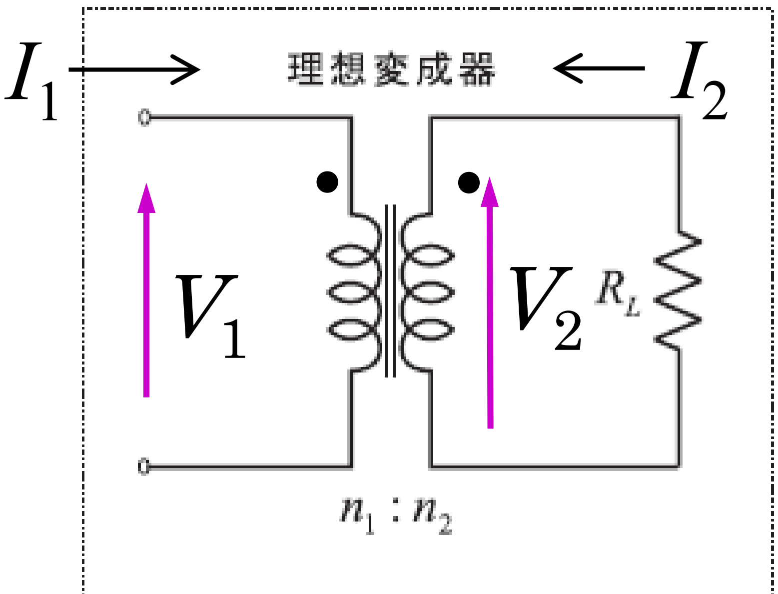
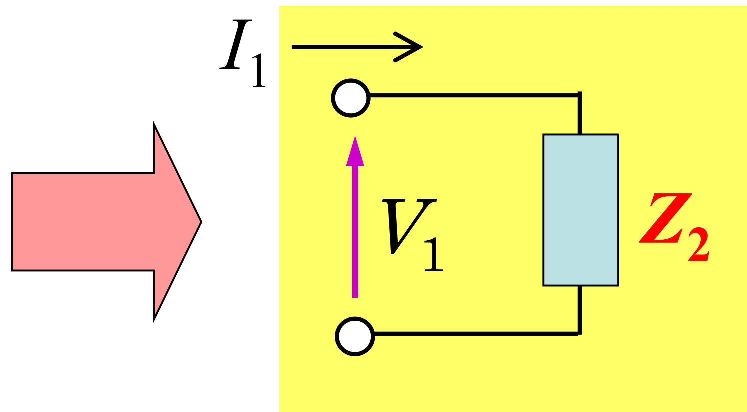


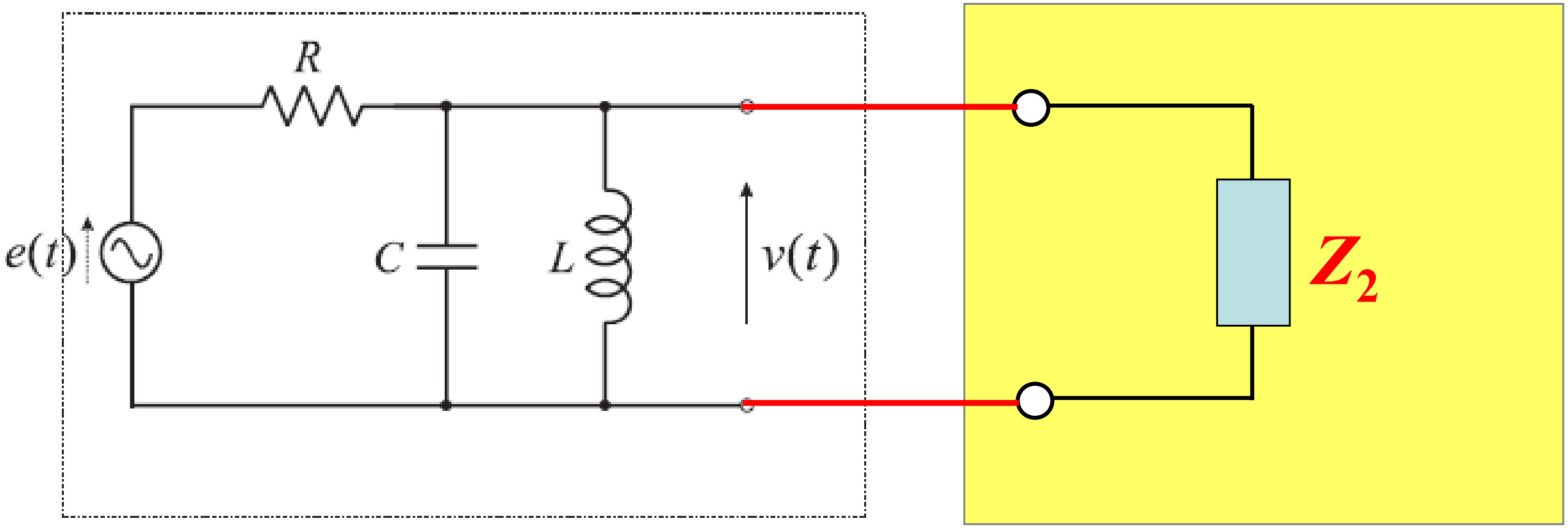
図2 負荷回路



$$Z_2 = \frac{V_1}{I_1} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 R_L$$

等価インピーダンスは、2次側の負荷インピーダンスを巻数比の2乗の逆数倍としたものとなる

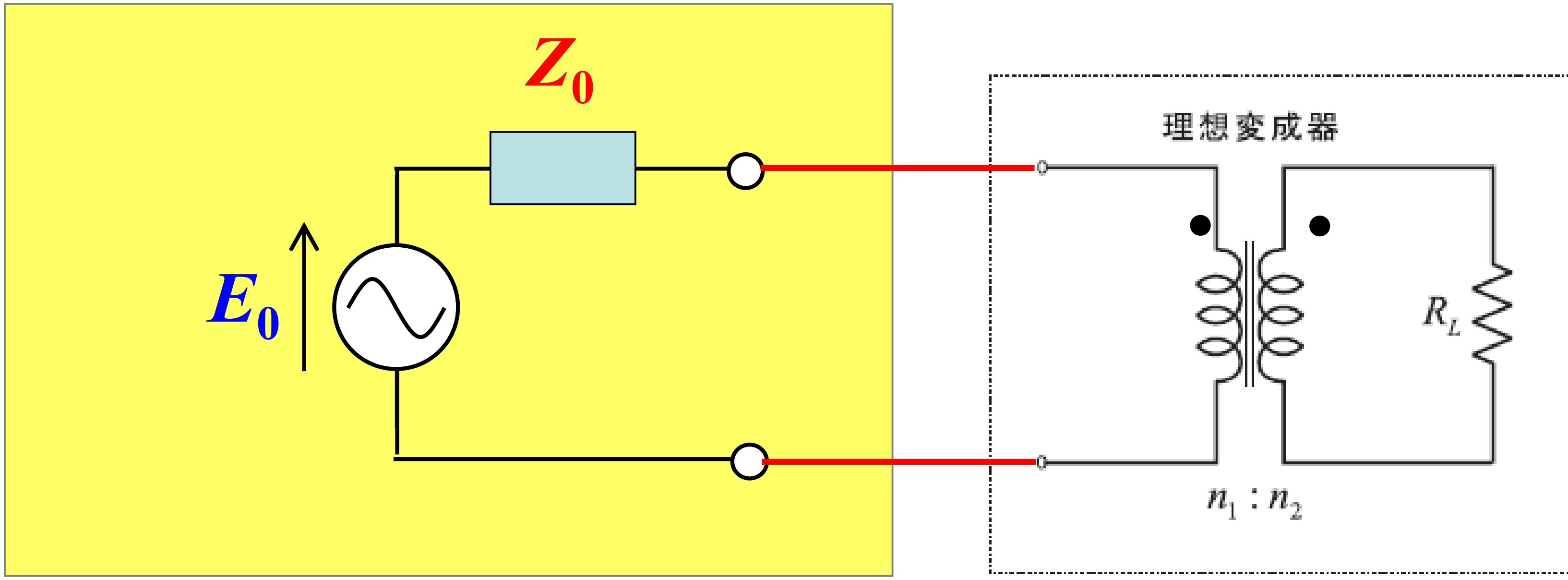
これを図2の負荷回路に置き換える。



$$Z_2 = \frac{V_1}{I_1} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 R_L$$

ω に無関係

また図１の回路を既に求めた等価電圧源に置き換える。



$$
\begin{cases}
E_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{1}{1 + j(\frac{\omega}{2} - \frac{1}{\omega})} \\[2ex]
Z_0 = \dfrac{1}{1 + j\left(\frac{\omega}{2} - \frac{1}{\omega}\right)} = \sqrt{2} E_0
\end{cases}
$$

ω に依存する

（続き）

以上から、図1、図2の回路をすべて等価回路に置き換えると

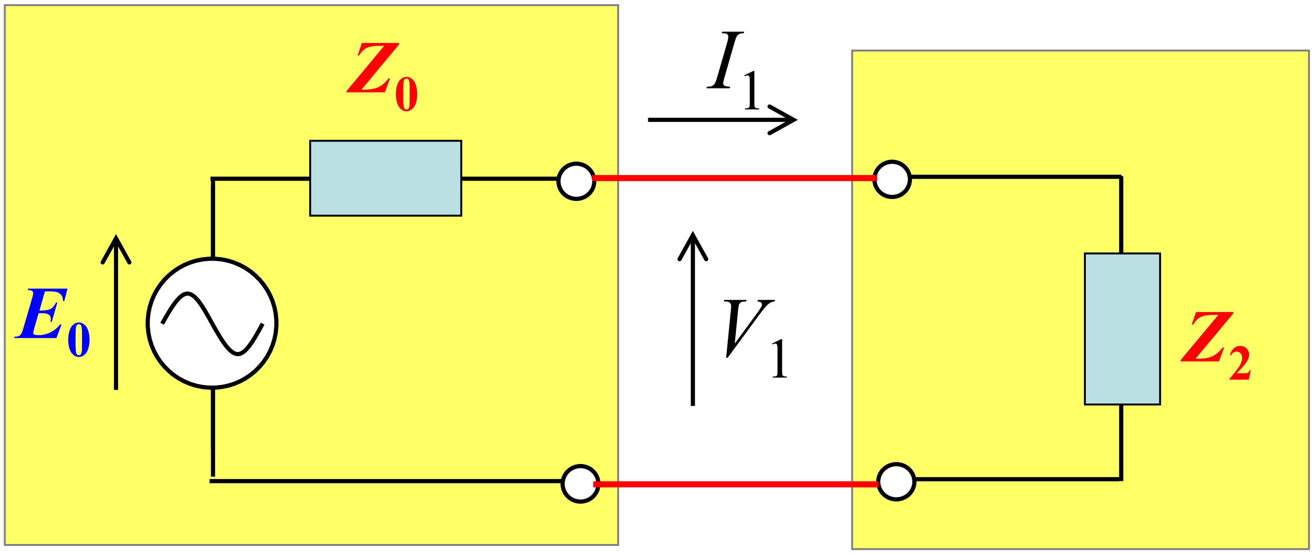


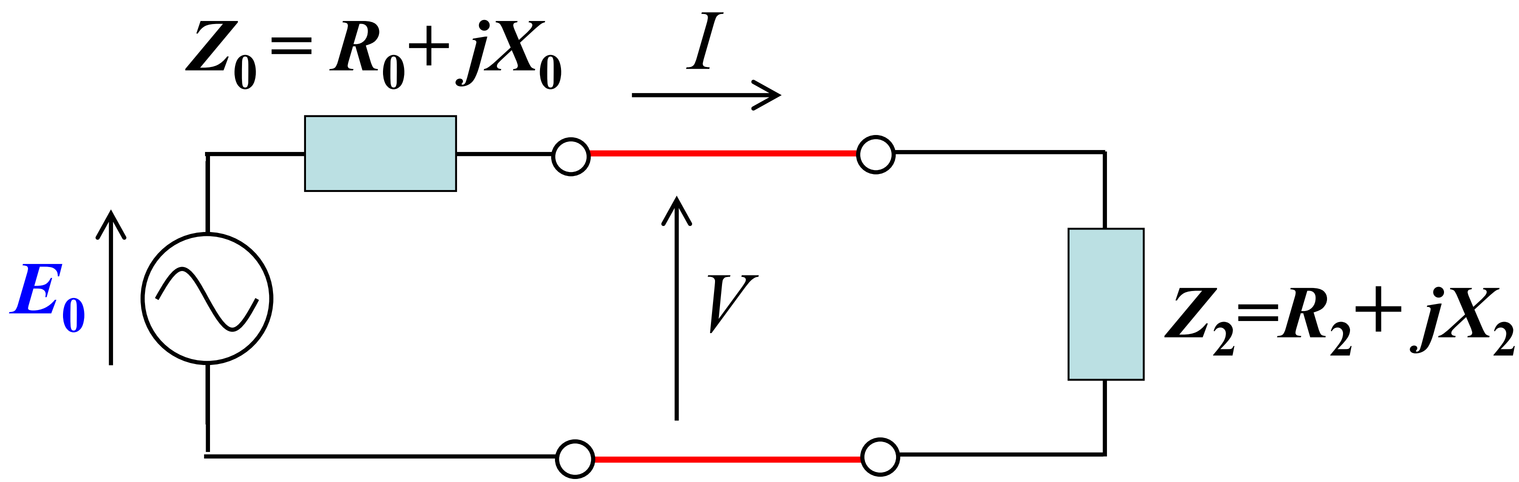
図1駆動回路

図2 負荷回路

$$
\begin{cases}
E_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{1}{1 + j(\frac{\omega}{2} - \frac{1}{\omega})} \\
Z_0 = \dfrac{1}{1 + j\left(\frac{\omega}{2} - \frac{1}{\omega}\right)} = \sqrt{2} E_0
\end{cases}
$$

$$
Z_2 = \frac{V_1}{I_1} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 R_L
$$

電源から負荷に供給される有効電力



内部インピーダンス Z_0 の電源から負荷インピーダンス Z_2 の抵抗 R_2 に供給される有効電力 P は

$$P = \left| \frac{R_2}{\sqrt{(R_0 + R_2)^2 + (X_0 + X_2)^2}} E_0 \right|^2 / R_2$$

$$= |E_0|^2 \frac{R_2}{(R_0 + R_2)^2 + (X_0 + X_2)^2}$$

最大電力供給の法則

負荷に供給される電力が最大となる(**整合条件**)は

$$Z_2 = \overline{Z}_0$$ （共役整合条件）

条件1： Z_0 と Z_2 の実部が一致すること

$$\Rightarrow \quad R_2 = R_0$$

条件2： Z_0 と（$-Z_2$）の虚部が一致すること

$$\Rightarrow \quad X_2 = -X_0$$

図1、図2の回路が以上の条件を満たすためには

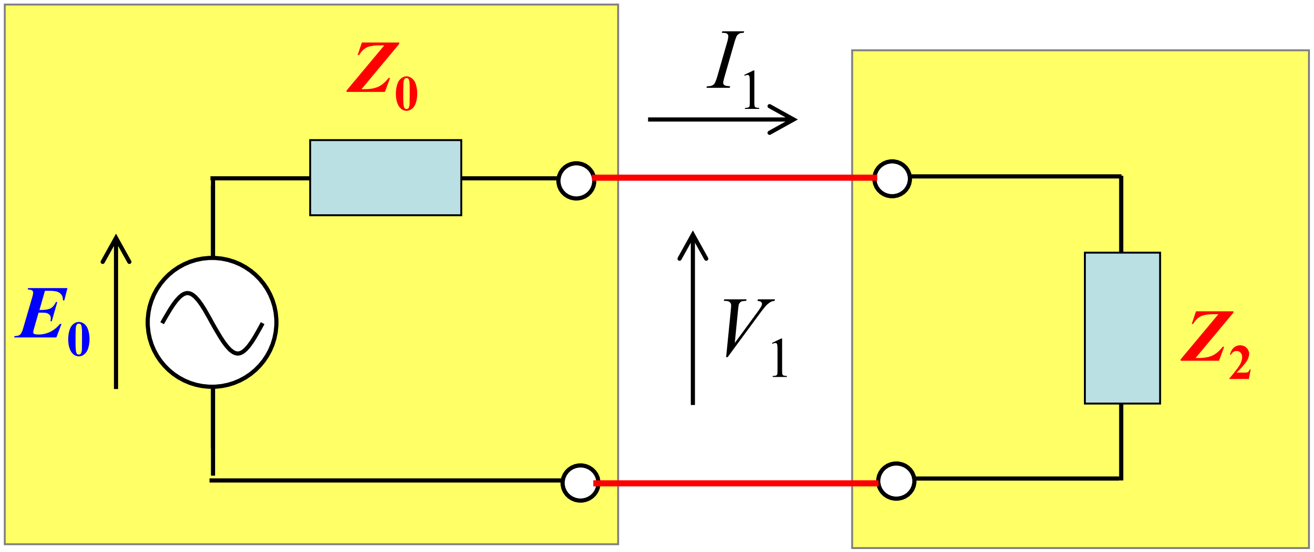


図1駆動回路　　　図2 負荷回路

$$Z_0 = \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega}{2} - \frac{1}{\omega}\right)} \Leftrightarrow Z_2 = \frac{V_1}{I_1} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 R_L$$

$$Z_2 = \bar{Z}_0$$

（共役整合条件）

今 Z_2 の虚部は 0 であるから、共役整合条件を満足するためには、Z_0 の虚部も 0 である必要がある。

$$Z_0 = \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega}{2} - \frac{1}{\omega}\right)} = \frac{1 - j\left(\frac{\omega}{2} - \frac{1}{\omega}\right)}{1 + \left(\frac{\omega}{2} - \frac{1}{\omega}\right)^2} \qquad \therefore \quad j\frac{\frac{\omega}{2} - \frac{1}{\omega}}{1 + \left(\frac{\omega}{2} - \frac{1}{\omega}\right)^2} = 0$$

虚部

したがって

$$\frac{\omega}{2} - \frac{1}{\omega} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = \sqrt{2} \quad [rad/s]}$$

となる

さらに$\omega=\sqrt{2}$における実部の整合条件を見ると

$$Z_0=1\ [\Omega]$$

$$Z_2=\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot 9=1\ [\Omega]$$

となっており、実部の整合条件も満足されている　これは

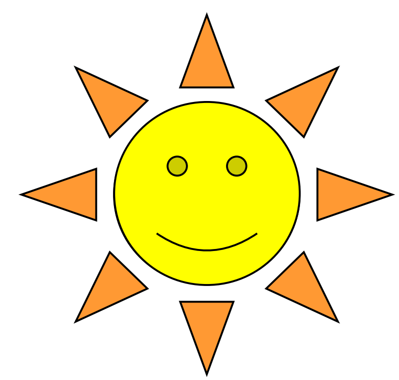
$$R=1[\Omega],\quad R_L=9[\Omega],\quad (n_2/n_1)^2=R_L/R$$

の条件がたまたま与えられたからである。

以上から、負荷インピーダンスR_Lで

消費される平均電力が最大になるωは

$$\boxed{\omega=\sqrt{2}\ \ [rad/s]}$$



正 解

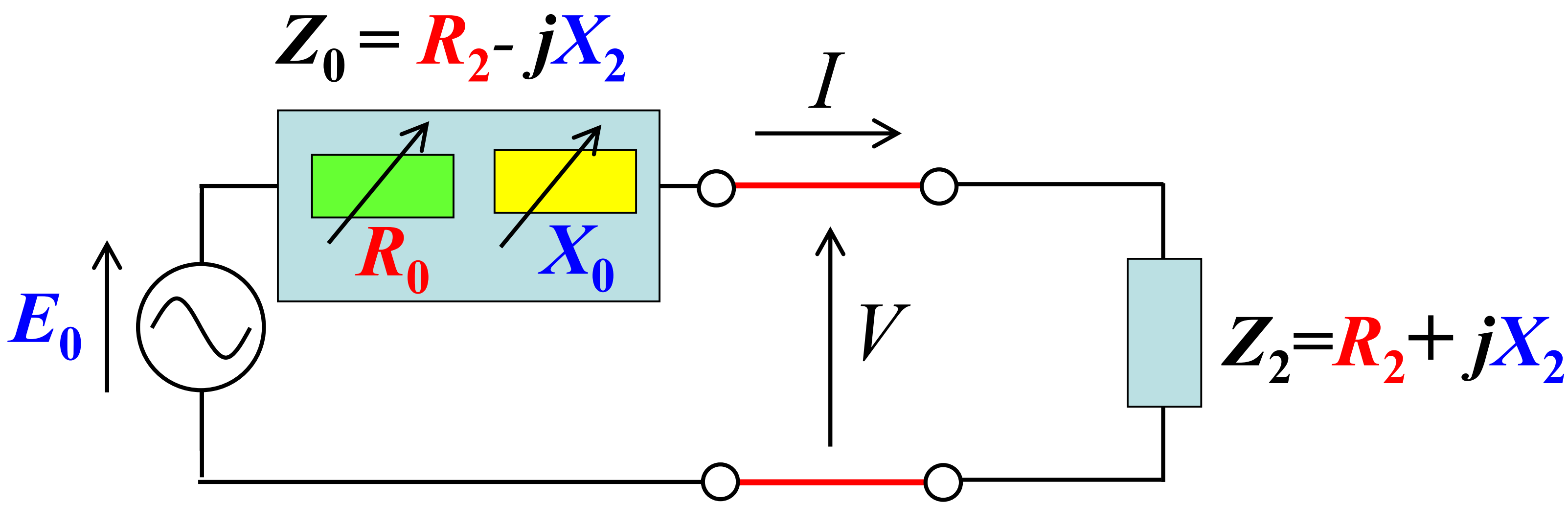
ある電源から任意の負荷に最大電力を供給するには、

条件1： Z_0 と Z_2 の**実部**が一致すること

条件2： Z_0 と（$-Z_2$）の**虚部**が一致すること

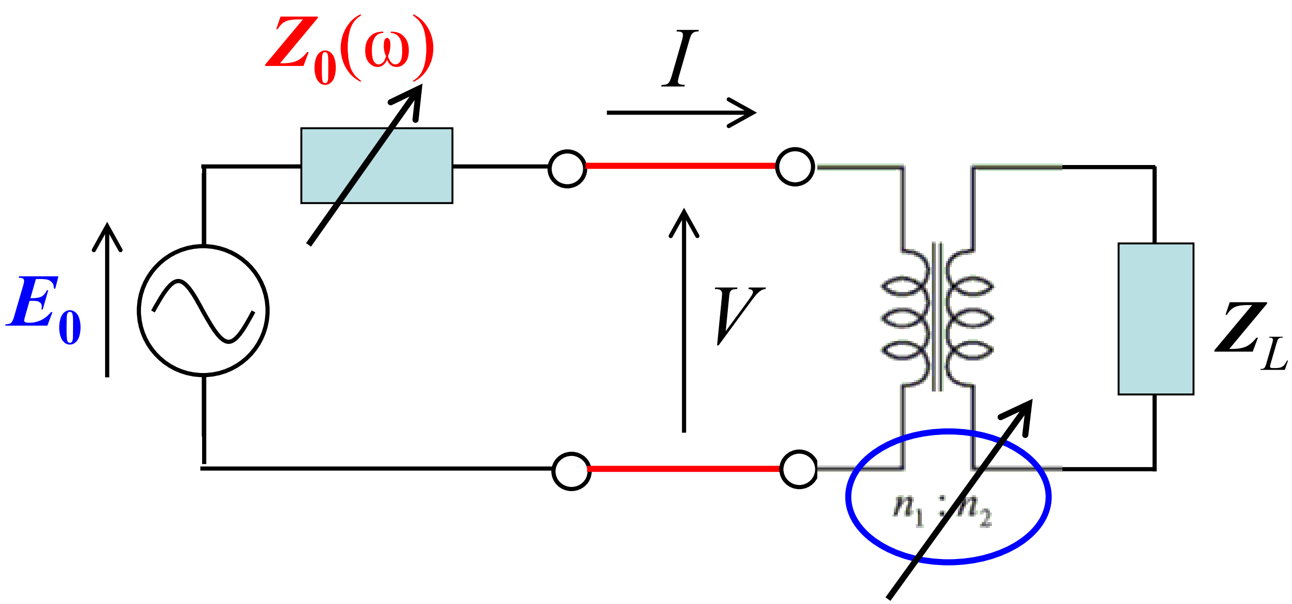
の2条件を満足させる必要があるため、**一般的には2つの独立なパラメータを可変とする必要がある**

＜例1：等価電源インピーダンスを可変にする＞



例題では、等価電源インピーダンスを可変にするための変数は ω のみであったが、実は**理想変成器の巻線比率**が隠し変数となっている（既に最適化されている）

＜例2：等価電源インピーダンスに加え変成器を可変とする＞



整合時に供給される電力は？

- 電圧、電流フェーザの積 $\overline{V}I$ は 複素電力

$$P_c = \overline{V}I = P + \mathrm{j}P_r$$

- 負荷に供給される平均電力（有効電力） P は

$$P = \mathrm{Re}\left[\overline{V}I\right]$$

- **整合時に**負荷に供給される有効電力 P は

$$P = \left|E_0\right|^2 \frac{R_2}{\left(R_0 + R_2\right)^2 + \left(X_0 + X_2\right)^2} = \frac{\left|E_0\right|^2}{4R_0}$$

⇒ 内部抵抗と負荷にかかる電圧がそれぞれ1/2となるので電力は1/4と考えればよい

さらに整合時以外の一般的な場合について考えると、

例題の負荷回路に供給される有効電力 P は $\alpha = \dfrac{\omega}{2} - \dfrac{1}{\omega}$

とおくと

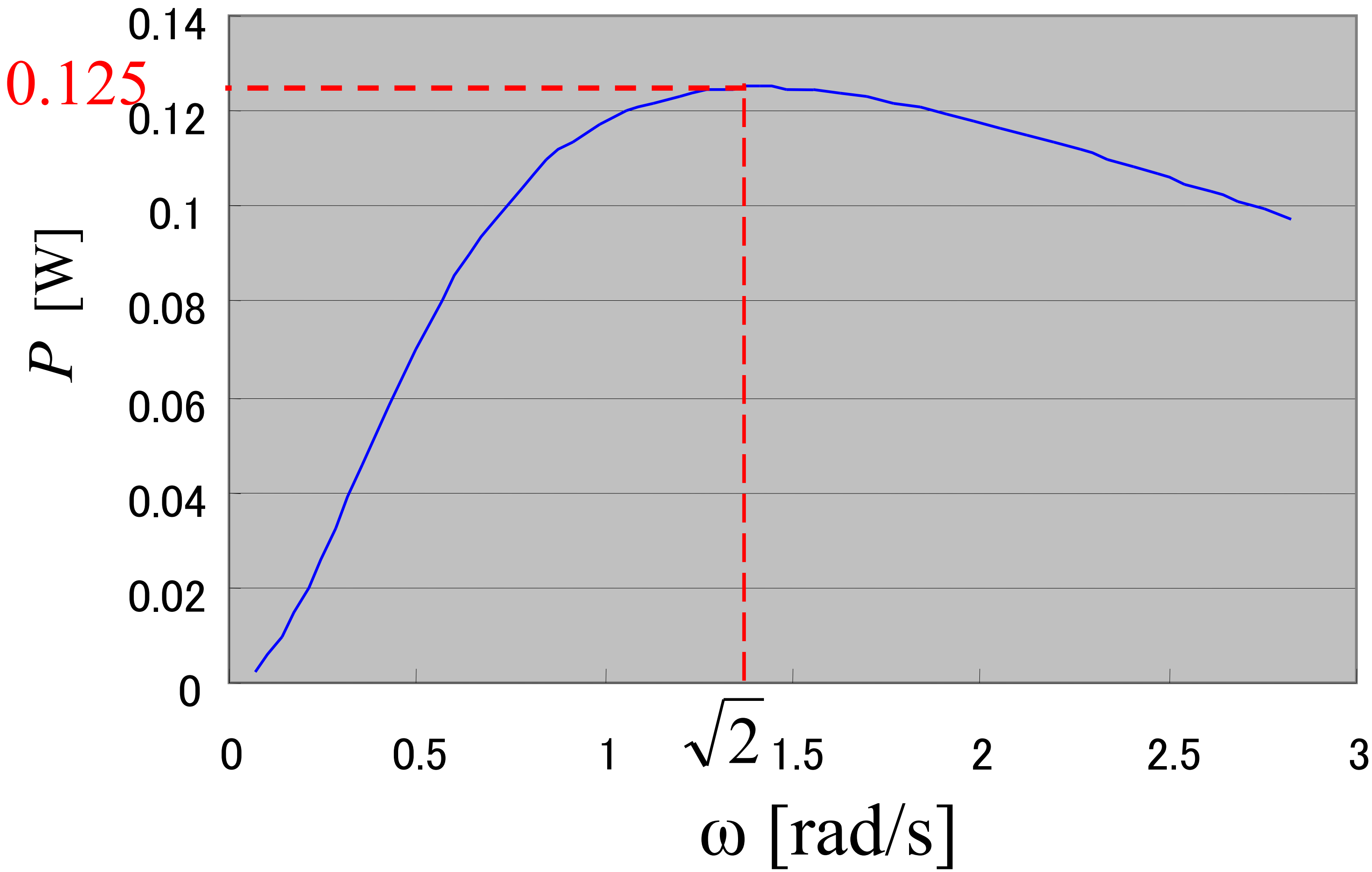
$$P = \left|E_0\right|^2 \frac{R_2}{\left(R_0 + R_2\right)^2 + \left(X_0 + X_2\right)^2}$$

$$\left|E_0\right|^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\alpha^2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\right)^2$$

$$R_0 = \frac{1}{1+\alpha^2}, \quad X_0 = \frac{\alpha}{1+\alpha^2}$$

$$R_2 = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 R_L, \quad X_2 = 0$$

以上を計算すると・・・・・



整合条件（$\omega = \sqrt{2}$）からずれると、供給電力は減少する